



CAM

di Camerino

36

MATEMATICA DISCRETA

Docente

Alessandro Della Corte

Studente

Giorgio Della Roscia

Università degli studi di Camerino

Informatica per la Comunicazione Digitale (L-31)

SCUOLA DI SCIENZE E TECNOLOGIE

A.A. 2022/2023

Indice

1	INDUZIONE	1
2	SUCCESSIONI	3
2.1	Proprietà delle successioni	3
2.1.1	Positività	3
2.1.1.1	Non-negatività	3
2.1.2	Limitatezza	3
2.1.3	Monotonia	4
2.1.4	Differenze prime	4
2.2	Limiti di successioni	5
2.2.1	Proprietà dei limiti di successioni	5
2.2.1.1	Approssimazione di Stirling	6
2.2.1.2	Operazioni coi limiti	6
3	CALCOLO VETTORIALE	8
3.1	Vettori	8
3.1.1	Componenti di un vettore	8
3.1.1.1	Modulo	8
3.1.1.2	Direzione	8
3.1.1.3	Verso	9
3.1.2	Operazioni fra vettori	9
3.1.2.1	Prodotto scalare	9
3.1.2.1.1	Vettori ortogonali	9
3.1.3	Proprietà dei vettori	10
3.1.3.1	Angolo fra due vettori	10
3.2	Matrici	10
3.2.1	Matrici caratteristiche	10
3.2.1.1	Matrici quadrate	10
3.2.1.1.1	Matrici triangolari superiori	10
3.2.1.1.2	Matrici triangolari inferiori	10
3.2.1.2	Matrici trasposte	11
3.2.1.2.1	Matrici simmetriche	11
3.2.1.3	Matrici diagonali	11
3.2.1.3.1	Matrici nulle	11
3.2.1.3.2	Matrici identità	11
3.2.1.4	Matrici inverse	11
3.2.2	Operazioni fra matrici	12
3.2.2.1	Somma algebrica fra matrici	12
3.2.2.2	Prodotto fra matrici	12
3.2.3	Determinante	12
3.2.3.1	Sviluppo di Laplace	13
3.3	Trigonometria	14
4	SISTEMI LINEARI	16
4.1	Metodo di eliminazione di Gauss	16
4.1.1	Matrici ridotte a gradini	16

4.2	Regola di Cramer	17
5	CALCOLO COMBINATORIO	19
5.1	Disposizioni	19
5.1.1	Disposizioni semplici	19
5.1.2	Disposizioni con ripetizioni	20
5.2	Permutazioni	20
5.2.1	Permutazioni semplici	20
5.2.1.1	Permutazioni circolari	20
5.2.2	Permutazioni con ripetizioni	21
5.3	Combinazioni	21
5.3.1	Combinazioni semplici	21
5.3.1.1	Potenze di un binomio	21
5.3.2	Combinazioni con ripetizioni	21

Bibliografia

Figure

2.1	Andamento funzioni monotòne	4
2.2	Successioni limitate ed illimitate	5
3.1	Componenti di un vettore	8
5.1	Permutazioni cicliche	20

Approfondimenti

Principio (induzione)	1
Esempio (principio di induzione)	1
Esempio (successioni infinite)	3
Definizione (limitatezza)	3
Teorema (unicità del limite)	5
Teorema (permanenza del segno)	5
Teorema (confronto)	5
Teorema (dei carabinieri)	6
Teorema (limiti finiti)	6
Teorema (moltiplicazione per uno scalare)	9
Teorema (regola del parallelogramma)	10
Teorema (disuguaglianza triangolare)	10
Teorema (Laplace)	13
Esempio (sviluppo di Laplace)	13
Teorema (Carnot)	14
Esempio (regola di Cramer)	17
Definizione (fattoriale)	19
Definizione (coefficiente binomiale)	19
Definizione (disposizioni)	19
Definizione (permutazioni)	20
Definizione (combinazioni)	21
Esercizio (potenze di un binomio)	21

Sezione 1

INDUZIONE

A volte risulta comodo dare per assodata una condizione e verificarne una sua estensione. In tal modo se quest'ultima si dimostra effettivamente vera si può, per procedimento induttivo, accertare anche la condizione precedente.

Principio (induzione). Si intende dimostrare una condizione $P(n)$ per dei determinati $n \in \mathbb{N}$:

1. **passo zero**, si verifica la validità per un basico k ;
2. **passo induttivo**, si assume che $P(n)$ sia vera, ne consegue che anche $P(n + 1)$ lo è.

Si testa $P(n + 1)$ e, se vale tale condizione, si arriva a dimostrarla retroattivamente per $P(n)$.

Esempio (principio di induzione). Dimostrare, tramite ipotesi induttiva, che

$$n^2 \geq 2n + 1 \quad \forall n > 2$$

.....

1. **Passo zero**

$$n = 3, \quad 3^2 \geq 3 \cdot 2 + 1 \rightarrow 9 \geq 6 + 1 \rightarrow 9 \geq 7$$

2. **Passo induttivo**

suppongo che $k^2 \geq 2k + 1$ sia vera, per un qualunque $k > n$, ne consegue che

$$(k + 1)^2 \geq 2(k + 1) + 1$$

Ne effettuo la verifica

$$k^2 + 2k + 1 \geq 2k + 2 + 1 \rightarrow k^2 + 2k + 1 \geq 2k + 2 + 1 \rightarrow 2k + 1 \geq 2, \quad \forall k > 2$$

Sezione 2

SUCCESSIONI

Sono delle funzioni che ad ogni numero naturale associano un unico numero reale. Si ottengono così delle sequenze infinite di valori reali.

Esempio (successioni infinite).

$$a_n = \frac{1}{n} : n \geq 1 = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}$$

L'indice n può partire da un qualsiasi numero naturale.

2.1 Proprietà delle successioni

Queste sequenze infinite di valori reali possono prendere delle determinate particolarità che le caratterizzano.

2.1.1 Positività

Qualora la successione rimanga sempre al di sopra dell'asse delle ascisse verrà detta positiva.

$$a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$$

2.1.1.1 Non-negatività

Qualora la successione rimanga sempre coincidente o al di sopra dell'asse delle ascisse verrà detta non-negativa.

$$a_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$$

2.1.2 Limitatezza

Esistono casi in cui le successioni sono delimitate in una certa porzione d'immagine

Definizione (limitatezza). Se esiste un certo valore reale ε per cui ogni elemento successivo ad esso sia maggiore, o minore, allora si dice che la successione ha limite inferiore, o superiore:

$$\exists \varepsilon : \varepsilon \leq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\exists \varepsilon : a_n \leq \varepsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

2.1.3 Monotonia

Se la successione ha una tendenza di andamento potrebbe ricadere in uno dei seguenti casi:

monotona crescente	$a_n \leq a_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$
monotona strettamente crescente	$a_n < a_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$
monotona decrescente	$a_n \geq a_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$
monotona strettamente decrescente	$a_n > a_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$

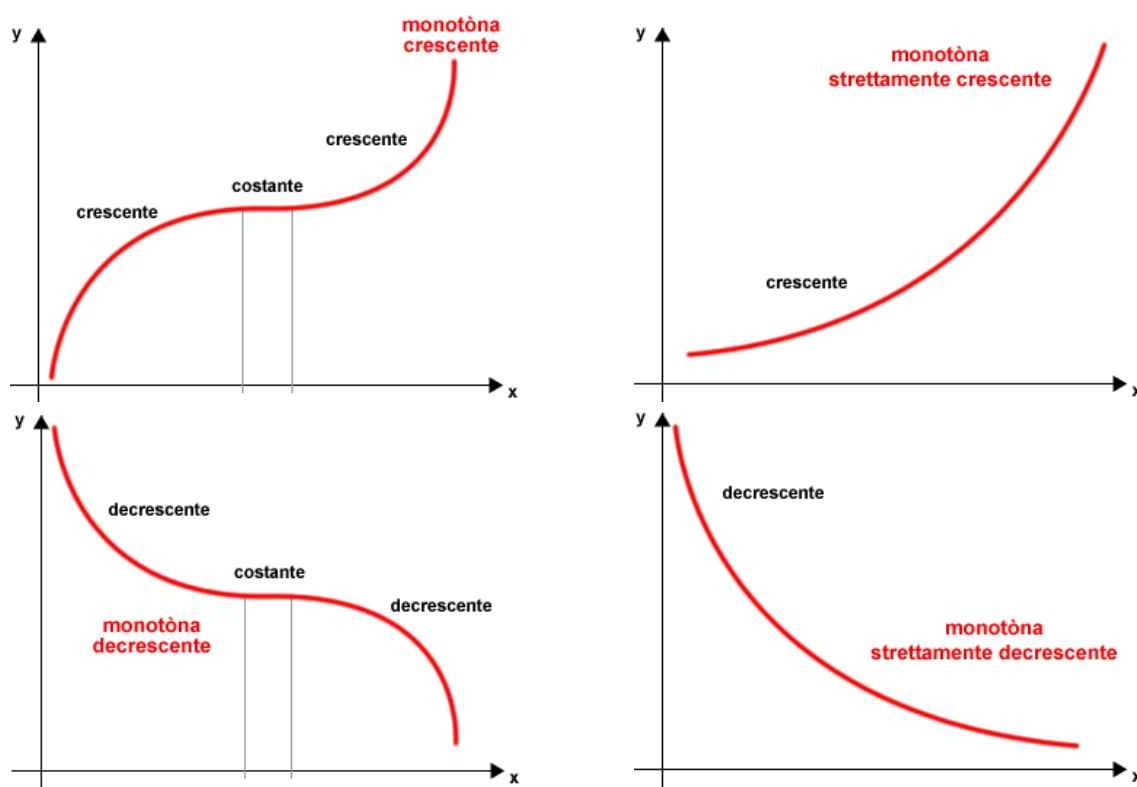


Figura 2.1: Andamento funzioni monotone

2.1.4 Differenze prime

Data una successione se ne ottiene un'altra, detta delle differenze prime, effettuando sottrazioni ripetute fra termini vicini. Vigie inoltre una curiosa proprietà legata all'andamento della successione:

quadratico	→ 1, 4, 9, 16, 25, ...
lineare	→ 3, 5, 7, 9, 11, ...
costante	→ 2, 2, 2, 2, 2, ...
nullo	→ 0, 0, 0, 0, 0, ...

2.2 Limiti di successioni

Ogni successione tende a qualcosa quando si estende all'infinito, si trovano tre casi:

convergente $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = l$

divergente $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \pm\infty$

inesistente $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \nexists$

Ogni successione può essere limitata o illimitata ma ciò non implica che sia convergente o divergente. Da cui si estrapola chiaramente che

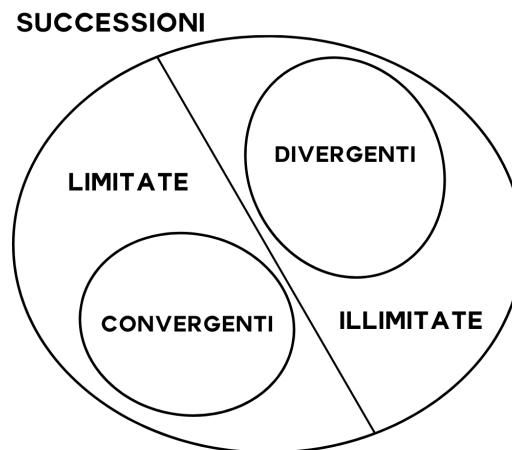


Figura 2.2: Successioni limitate ed illimitate

- se a_n è convergente allora risulta limitata
- se a_n è divergente allora risulta illimitata
- se a_n è limitata allora ha una sottosuccessione convergente
- se a_n è illimitata allora ha una sottosuccessione divergente

2.2.1 Proprietà dei limiti di successioni

Teorema (unicità del limite). Se il limite di una successione esiste, allora è unico.

Teorema (permanenza del segno). Se la successione converge ed è positiva, o negativa, esiste un certo valore ε tale che qualunque punto della successione maggiore di esso resti positivo, o negativo.

Teorema (confronto). Prese due successioni a_n e b_n , se

$$a_n \leq b_n \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = b$$

allora è indubbio che $a \leq b$.

Teorema (dei carabinieri). Siano a_n , b_n e c_n tre successioni tali che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = k \qquad \lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = k$$

e inoltre vale

$$a_n \leq b_n \leq c_n \qquad \forall n \geq \varepsilon$$

allora è logico che $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = k$

2.2.1.1 Approssimazione di Stirling

Esiste una formula dedicata ad indicare il comportamento asintotico del fattoriale:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sim \lim_{n \rightarrow +\infty} n! = +\infty$$

2.2.1.2 Operazioni coi limiti

Teorema (limiti finiti). Il limite delle operazioni fra due successioni equivale al risultato dell'operazione fra i limiti:

somma algebrica	$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \pm b_n$	$= a \pm b$
prodotto	$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \cdot b_n$	$= a \cdot b$
quoziente	$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n}$	$= \frac{a}{b}$
logaritmo naturale	$\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(a_n)$	$= \ln(a)$
potenza	$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n^{b_n}$	$= a^b$

Chiaramente avendo $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$ e $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = b$.

Sezione 3

CALCOLO VETTORIALE

Ogni operazione che coinvolge i vettori rientra in questo ambito.

3.1 Vettori

Dato un segmento $\overline{AB}$ si riesce a definire due diversi vettori: $\vec{AB}$ e $\vec{BA}$.

3.1.1 Componenti di un vettore

Dato un vettore è possibile inserire un sistema di riferimento ortogonale uscente dal punto di applicazione di esso. In tal modo risulta possibile identificare, tramite misure cartesiane, il punto di arrivo.

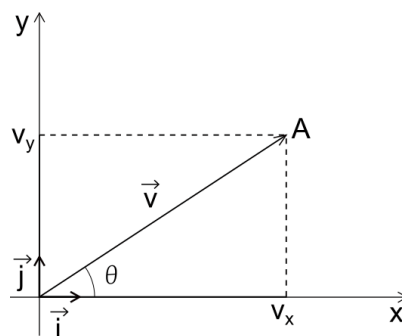


Figura 3.1: Componenti di un vettore

Così facendo capiamo che esiste un'associazione biunivoca fra i vettori nel piano e le coppie di numeri reali.

3.1.1.1 Modulo

La lunghezza di tale segmento viene detta modulo e viene indicata secondo:

$$|\vec{u}| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2}$$

3.1.1.2 Direzione

Dati due vettori se essi giacciono sulla medesima retta o se si trovano in rette fra loro parallele si dice che hanno la stessa direzione.

3.1.1.3 Verso

Spesso la direzione può essere fraintesa con il verso, ovvero l'indicatore dell'andamento. Viene indicato dalla freccia.

3.1.2 Operazioni fra vettori

La somma di due vettori può essere risolta graficamente con la regola del parallelogramma ma anche algebricamente secondo:

$$\begin{aligned}\vec{u} &= \{u_x, u_y\} \\ \vec{v} &= \{v_x, v_y\} \\ \vec{u} + \vec{v} &= \{u_x + v_x, u_y + v_y\}\end{aligned}$$

Teorema (moltiplicazione per uno scalare). Dato un vettore $\vec{u}$ ed uno scalare $k \neq 0$, $k \in \mathbb{R}$, si avrà il loro prodotto secondo:

$$\begin{cases} k > 0, \text{ direzione e verso di } \vec{u} \\ k = 0, \text{ vettore nullo} \\ k < 0, \text{ direzione e verso opposti di } \vec{u} \end{cases}$$

Chiaramente si moltiplica ogni elemento di $\vec{u}$ per lo scalare k .

Dati due vettori $\vec{u}, \vec{v}$ e due scalari h, k valgono le seguenti condizioni:

$$\begin{aligned} \cdot 0\vec{u} &= \vec{0} & \cdot 1\vec{u} &= \vec{u} & \cdot -1\vec{u} &= -\vec{u} \\ \cdot h(k\vec{u}) &= (hk)\vec{u} & \cdot h(\vec{u} + \vec{v}) &= h\vec{u} + h\vec{v} & \cdot (h+k) \cdot \vec{u} &= h\vec{u} + k\vec{u} \end{aligned}$$

3.1.2.1 Prodotto scalare

Dati due vettori si ha il loro prodotto scalare moltiplicando gli elementi posti nelle stesse posizioni fra loro e sommando i risultati.

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \quad \vec{v} \cdot \vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = (u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + u_3 \cdot v_3)$$

Se viene aggiunto uno scalare si applica la proprietà bilineare:

$$2(\vec{u} \cdot \vec{v}) = 2\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot 2\vec{v}$$

Va detto che al variare del sistema di riferimento, il prodotto scalare fra due vettori non cambia.

3.1.2.1.1 Vettori ortogonali

Due vettori sono perpendicolari se, e solo se, il loro prodotto scalare è nullo.

$$\vec{u} \perp \vec{v} \iff \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

3.1.3 Proprietà dei vettori

Nel caso in cui si sommano due vettori l'operazione può essere risolta, geometricamente, sfruttando un particolare metodo.

Teorema (regola del parallelogramma). Dati due vettori $\underline{u} = B - A$ e $\underline{v} = D - B'$, laddove $B \equiv B'$, allora $\underline{u} + \underline{v} := D - A$.

Teorema (disuguaglianza triangolare). In un triangolo la lunghezza di un qualsiasi suo lato non può essere superiore alla maggiore delle lunghezze delle altre due.

$$|\vec{u} + \vec{v}| \leq |\vec{u}| + |\vec{v}|$$

3.1.3.1 Angolo fra due vettori

Per calcolare l'angolo creato fra due vettori con origine comune si adopera la seguente formula:

$$\alpha = \arccos\left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}\right)$$

3.2 Matrici

È una tabella matematica formata da righe e colonne. Si tratta di un vettore i cui elementi sono altri vettori. Dato ciò, gli elementi contenuti in essa sono numeri reali.

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} \end{pmatrix} := a_{ij}$$

3.2.1 Matrici caratteristiche

Alcune matrici si differenziano per determinate proprietà strutturali.

3.2.1.1 Matrici quadrate

Hanno lo stesso numero di righe e colonne.

$$\forall i, j : i = j \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ii} \end{pmatrix}$$

3.2.1.1.1 Matrici triangolari superiori

Tutti gli elementi al di sotto della diagonale principale sono zeri.

$$\forall i, j : i > j \quad a_{ij} = 0 \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 23 & 8 & 7 \\ 0 & 0 & 4 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

3.2.1.1.2 Matrici triangolari inferiori

Tutti gli elementi al di sopra della diagonale principale sono zeri.

$$\forall i, j : i < j \quad a_{ij} = 0 \quad A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 8 & 0 & 0 \\ 2 & -7 & 14 & 0 \\ -8 & 9 & 28 & -4 \end{pmatrix}$$

3.2.1.2 Matrici trasposte

Si ottengono scambiando le righe con le colonne e si indica nel seguente modo: $A \rightarrow A^T$.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -4 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 1 & -4 & 6 \end{pmatrix}$$

Vigono alcune proprietà:

$$(A + B)^T = A^T + B^T \quad (\lambda A)^T = \lambda(A)^T \quad A^T + B = (A + B^T)^T$$

3.2.1.2.1 Matrici simmetriche

Una matrice è detta simmetrica se coincide esattamente con la sua trasposta.

$$A \equiv A^T \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 5 \\ 4 & 5 & -6 \end{pmatrix} = A^T$$

3.2.1.3 Matrici diagonali

Gli elementi extradiagonali sono nulli, quelli posti sulla diagonale non devono seguire alcuna imposizione.

$$\forall i, j : i \neq j \quad a_{ij} = 0 \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & a_{ij} \end{pmatrix}$$

3.2.1.3.1 Matrici nulle

Un caso particolare riguarda le matrici in cui tutti gli elementi presenti, sia extradiagonali che non, sono uguali a zero:

$$\forall i, j \quad a_{ij} = 0 \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3.2.1.3.2 Matrici identità

La diagonale è composta da uni e poi ci sono zeri nelle altre posizioni. Vengono anche dette matrici unità. Moltiplicando una matrice casuale a questa il risultato riporta alla prima.

$$\forall i, j : \begin{cases} i = j & a_{ij} = 1 \\ i \neq j & a_{ij} = 0 \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3.2.1.4 Matrici inverse

Moltiplicando due matrici quadrate si ottiene una matrice identità se, e solo se, una è l'inversa dell'altra.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A \equiv B^{-1}$$

Non tutte le matrici hanno un'inversa, ne è un esempio quella nulla. Questo è dato dal fatto che devono avere determinante diverso da zero.

3.2.2 Operazioni fra matrici

Prese due matrici è possibile effettuare delle operazioni fra loro. Queste sono la somma algebrica, ossia addizione e sottrazione, e, come vedremo solamente in alcuni casi specifici, la moltiplicazione.

3.2.2.1 Somma algebrica fra matrici

Si eseguono semplicemente operazioni uno a uno fra le due o più matrici interessate.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix} \quad A - B = \begin{pmatrix} a_{11} - b_{11} & a_{12} - b_{12} \\ a_{21} - b_{21} & a_{22} - b_{22} \end{pmatrix}$$

3.2.2.2 Prodotto fra matrici

Il requisito fondamentale per eseguirlo è che il numero di colonne della prima deve essere eguale a quello delle righe della seconda.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}_{2 \times 3} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}_{3 \times 2}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} + a_{13} \cdot b_{31} & a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} + a_{13} \cdot b_{32} \\ a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} + a_{23} \cdot b_{31} & a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} + a_{23} \cdot b_{32} \end{pmatrix}_{2 \times 2}$$

Esiste un trucco per verificare la plausibilità del calcolo appena effettuato: la matrice risultato deve avere il numero di righe della prima e di colonne della seconda.

3.2.3 Determinante

Ad ogni matrice quadrata è possibile associare uno scalare. La formula necessaria per calcolarlo varia in base alla dimensione. Ristretta alle 2×2 , risulta essere:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad \det(A) = (a_{11} \cdot a_{22}) - (a_{12} \cdot a_{21})$$

Per le 3×3 c'è una variazione chiamata metodo di Sarrus:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = [(a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33}) + (a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31}) + (a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32})] + \\ - [(a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31}) + (a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}) + (a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32})]$$

3.2.3.1 Sviluppo di Laplace

Il metodo generalizzato è scandito dal seguente enunciato, secondo il quale il calcolo del determinante avviene attraverso formule ricorsive, dette sviluppi di Laplace.

Teorema (Laplace). Data una matrice $i \times j$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} \end{pmatrix}$$

occorre andare a denotare con A_{xy} la matrice ottenuta rimuovendo la riga i e la colonna j dalla matrice A_{ij} . Infine, viene fissato il valore $(-1)^{x+y} \cdot \det(A_{xy})$ e detto complemento algebrico.

· sviluppo per righe:

$$\det(A) = \sum_{y=1}^i [a_{xy} \cdot (-1)^{x+y} \cdot \det(A_{xy})]$$

· sviluppo per colonne:

$$\det(A) = \sum_{x=1}^i [a_{xy} \cdot (-1)^{x+y} \cdot \det(A_{xy})]$$

Conviene applicare tale calcolo sulla riga, o colonna, contenente il maggior numero di zeri, o comunque elementi più semplici.

Esempio (sviluppo di Laplace). Vediamo come calcolare il determinante della seguente matrice seguendo lo sviluppo di Laplace.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

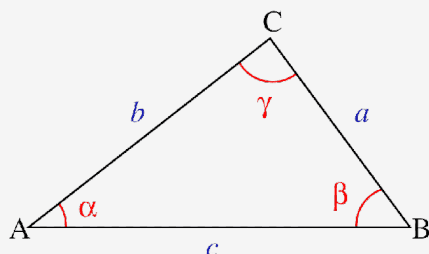
Per prima cosa si sceglie la riga, o colonna, coi termini più semplici. In questo caso la prima colonna.

$$\det(A) = 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot (-1)^{1+2} \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + 0 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = 9$$

3.3 Trigonometria

Teorema (Carnot). Preso un triangolo qualunque si ha la seguente relazione:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$



Dunque il quadrato di un cateto è eguale alla somma dei quadrati degli altri due lati a cui va sottratto il doppio prodotto dei lati, escluse sé stesso, e del coseno dell'angolo opposto.

Vi è inoltre una regola fondamentale, l'identità pitagorica:

$$\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$$

Sezione 4

SISTEMI LINEARI

Si tratta di un insieme di equazioni di primo grado da soddisfare per ottenere la soluzione. Una singola equazione viene detta lineare quando il modello utilizzato lo è a sua volta:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_nx_n = b \quad a, b \in \mathbb{R}$$

b viene detto termine noto. Ogni volta che si parla di un sistema lineare ci sono solamente tre possibili risultati:

1. nessuna soluzione $\nexists$
2. una sola soluzione $(a_1, a_2, \dots, a_n) = (k_1, k_2, \dots, k_n)$
3. infinite soluzioni ∞^n

Nel caso in cui si abbiano più incognite che equazioni nel sistema si ricade nella terza casistica.

4.1 Metodo di eliminazione di Gauss

Per trovare la soluzione di un sistema si prosegue algebricamente oppure adoperando le matrici:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1j} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & b_i \end{array} \right)$$

Si ha una forma del tipo $AX = B$; dove A è la matrice dei coefficienti, X quella delle incognite e B quella dei termini noti.

4.1.1 Matrici ridotte a gradini

Ogni riga non nulla ha un elemento diverso da zero al di sotto del quale siano posizionati solamente valori nulli. Questo viene anche detto elemento speciale o pivot.

$$\begin{pmatrix} 9 & 4 & -2 & 8 \\ 0 & 0 & 6 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Per ottenere ciò si sfruttano tre regole utili:

- scambiare due righe, o colonne;
- moltiplicare una riga, o colonna, per uno scalare diverso da zero;
- sommare una riga, o una colonna, e un multiplo non nullo di un'altra.

4.2 Regola di Cramer

Dedita essenzialmente per risolvere sistemi lineari andando a trovare le incognite presenti.

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} ?$$

Questa tecnica è applicabile esclusivamente nei casi in cui il determinante della matrice analizzata sia diverso da zero.

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \quad \det(A) \neq 0$$

$$X = \begin{pmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{pmatrix} \quad Z = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{pmatrix}$$

$$x = \frac{\det(X)}{\det(A)} \quad y = \frac{\det(Y)}{\det(A)} \quad z = \frac{\det(Z)}{\det(A)}$$

Esempio (regola di Cramer). Risolvere il seguente sistema di equazioni lineari

$$\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ -y + z + 4x = -5 \\ -x + y + 2z = 5 \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \det(A) = -12 \neq 0$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -5 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -5 & 1 \\ -1 & 5 & 2 \end{pmatrix} \quad Z = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & -5 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\det(X) = 12$$

$$\det(Y) = -24$$

$$\det(Z) = -12$$

$$x = \frac{\det(X)}{\det(A)} = \frac{12}{-12} = -1 \quad y = \frac{\det(Y)}{\det(A)} = \frac{-24}{-12} = 2 \quad z = \frac{\det(Z)}{\det(A)} = \frac{-12}{-12} = 1$$

Sezione 5

CALCOLO COMBINATORIO

Si sfruttano dei metodi per raggruppare un numero finito di elementi. Va però introdotta innanzitutto una legge basilare della percentuale: $a\%$ di $b = b\%$ di a .

Definizione (fattoriale). Dato un intero n il suo fattoriale è dato dalla produttoria di tutti i numeri positivi minori o uguali ad n :

$$n! = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ \prod_{i=1}^n i & n > 0 \end{cases}$$

Definizione (coefficiente binomiale). A partire da una coppia di numeri naturali (n, k) se ne ricava un terzo, $\binom{n}{k}$, che rappresenta il numero di sottoinsiemi di k elementi che si possono estrarre da un insieme di n elementi:

$$A = \{a, b, c, d\} \quad \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}\} \quad \binom{n}{k} = \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!} & 0 \leq k \leq n \\ 0 & 0 \leq n < k \end{cases}$$

5.1 Disposizioni

Si intende ordinare un certo sottoinsieme di un insieme padre.

Definizione (disposizioni). Raggruppamento ordinato di k elementi estratti da un insieme che ne contiene n , con $k \leq n$. Si dicono dunque disposizioni di classe k :

- ogni raggruppamento contiene k elementi;
- ciascun raggruppamento differisce dagli altri per almeno un elemento oppure per l'ordine di successione.

5.1.1 Disposizioni semplici

Il caso più banale, in cui le ripetizioni sono bandite

$$A = \{a, b, c\} \quad n = 3, k = 2 \quad \text{senza ripetizioni} \quad \rightarrow \quad \{\{a, b\} : \{a, c\} : \{b, a\} : \{b, c\} : \{c, a\} : \{c, b\}\}$$

La formula generale è data dal fattoriale del numero degli oggetti presenti nell'insieme diviso a quello della sottrazione fra esso e quello degli elementi interessati:

$$D_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

5.1.2 Disposizioni con ripetizioni

Se vengono accettate le ripetizioni il numero di disposizioni chiaramente aumenta:

$$A = \{a, b, c\} \quad n = 3, k = 2 \quad \text{con ripetizioni}$$

$$\{\{a, a\} : \{a, b\} : \{a, c\} : \{b, b\} : \{b, a\} : \{b, c\} : \{c, c\} : \{c, a\} : \{c, b\}\}$$

Si ha una generalizzazione del calcolo data dal numero degli oggetti appartenenti all'insieme elevato per quelli analizzati:

$$D'_{n,k} = n^k$$

5.2 Permutazioni

Avviene uno scambio dell'ordine degli elementi di una data sequenza, riguarda dunque uno dei possibili modi per ordinarla.

Definizione (permutazioni). Considerando n elementi, si dicono permutazioni tutti i possibili raggruppamenti formati in modo che:

- ogni raggruppamento contenga tutti gli n elementi;
- ciascun raggruppamento differisca dagli altri per l'ordine di successione.

$$A = \{a, b, c\} \rightarrow \{\{a, b, c\}, \{a, c, b\}, \{b, a, c\}, \{b, c, a\}, \{c, a, b\}, \{c, b, a\}\}$$

5.2.1 Permutazioni semplici

Ogni elemento appartenente all'insieme preso in considerazione differisce l'uno dall'altro.

$$P_n = n!$$

5.2.1.1 Permutazioni circolari

Si tratta fondamentalmente di preposizioni semplici disposte però in modo tale, circolare per l'appunto, da non riuscire a distinguere il primo e l'ultimo elemento della sequenza.

$$P_n^c = (n-1)!$$

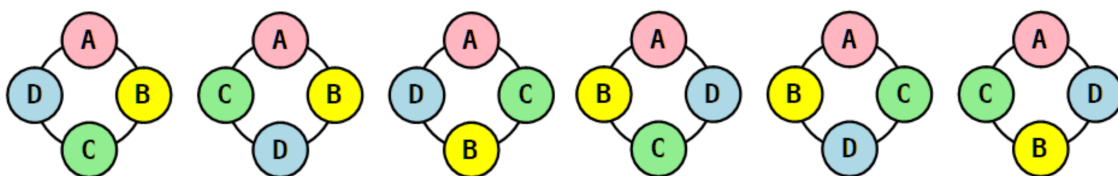


Figura 5.1: Permutazioni cicliche

5.2.2 Permutazioni con ripetizioni

Dato un insieme di oggetti è possibile notare almeno una ripetizione degli elementi presenti.

$$P_n^{n_1, n_2, \dots, n_k} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!} \quad n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$$

5.3 Combinazioni

Dato un insieme con n elementi viene estratto un sottoinsieme, per definizione senza struttura di ordine, di k oggetti.

Definizione (combinazioni). Sequenza di k oggetti estratti tra n elementi distinti, nell'ipotesi che l'ordine di estrazione sia ininfluente:

- ogni raggruppamento contiene esattamente k elementi;
- i vari raggruppamenti differiscano tra loro per almeno un elemento, ma non per l'ordinamento.

5.3.1 Combinazioni semplici

Non vengono accettate soluzioni contenenti doppi:

$$A = \{a, b, c\} \rightarrow \{\{a, b\} : \{a, c\} : \{b, c\}\} \quad C_{n,k} = \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Valgono le seguenti proprietà:

$$\binom{n}{k+1} = \binom{n}{k} \cdot \frac{n-k}{k+1} \quad \binom{n}{0} = 1 : \emptyset \quad \binom{n}{1} = n$$

5.3.1.1 Potenze di un binomio

Si necessita di calcolare la potenza n -esima di un binomio: $(a+b)^n$, $n \in \mathbb{N}$. Ciò si effettua tramite l'ausilio della seguente formula:

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^k = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot a^{n-k} \cdot b^k$$

Esercizio (potenze di un binomio). Quante sestine distinte possono formarsi con i numeri da 1 a 90?

.....

$$\begin{matrix} n = 90 \\ k = 6 \end{matrix} \quad \frac{90!}{6!(90-6)!} = \frac{90!}{6! \cdot 84!} \simeq 622 \text{ mln}$$

5.3.2 Combinazioni con ripetizioni

Vengono incluse anche unioni composte da:

$$A = \{a, b, c\} \rightarrow \{\{a, a\} : \{a, b\} : \{a, c\} : \{b, b\} : \{b, c\} : \{c, c\}\} \quad C'_{n,k} = \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$$

In questo caso non esiste il vincolo per il quale obbligatoriamente $k < n$.

Bibliografia

- [TL06] Carlo Toffalori and Stefano Leonesi. Un invito all'algebra. 1st ed. Springer, 2006.
ISBN: 9788847003132.